33　関数の増減・極値

284

a の値と極値

$f(x)=\frac{1}{5}x^5+ax^3$ の導関数は $f'(x)=x^4+3ax^2=x^2(x^2+3a)$

$x=1$ で極値をとるための必要条件は $f'(1)=0$ すなわち，$f'(1)=1+3a$ より，$a=-\frac{1}{3}$

このとき，$f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3$，$f'(x)=x^2(x^2-1)=x^2(x+1)(x-1)$ より，

$f(x)$ の増減は次の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	極大	$\downarrow$	0	$\downarrow$	極小	$\uparrow$

よって，$a=-\frac{1}{3}$ のとき $f(x)$ は $x=1$ で極値をもつ。

ゆえに，$f(x)$ が $x=1$ で極値をとる a の値は $-\frac{1}{3}$

このとき，$x=-1$ で極大値 $f(-1)=\frac{2}{15}$，$x=1$ で極小値 $f(1)=-\frac{2}{15}$ をとる。

原点を通る接線の方程式

$f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t)+f(t) \\ &= (t^4-t^2)(x-t)+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3 \\ &= (t^4-t^2)x-\frac{4}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3 \\ &= (t^4-t^2)x-\frac{4}{5}t^3\left(t^2-\frac{5}{6}\right) \end{aligned}$$

これが原点を通るとき，$t^3\left(t^2-\frac{5}{6}\right)=0$ より，$t^2=0\ ,\frac{5}{6}$ $\left(t=0,\ \pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$

このとき，$t^4-t^2=0,\ -\frac{5}{36}$ より，原点を通る接線の方程式は $y=0$，$y=-\frac{5}{36}x$

285

$f(x)=px^3-qx+p$ の導関数は $f'(x)=3px^2-q$

条件より，

$f'(\alpha)=0$ すなわち $3p\alpha^2-q=0$　$\therefore q=3p\alpha^2$　・・・①

$f(\alpha)=q$ すなわち $p\alpha^3-q\alpha+p=q$　$\therefore p\alpha^3+p-q\alpha-q=0$ ・・・②

①を②に代入すると，$p\alpha^3+p-3p\alpha^3-3p\alpha^2=0$

これと，

$$\begin{aligned}p\alpha^3+p-3p\alpha^3-3p\alpha^2&=-p(2\alpha^3+3\alpha^2-1)\\&=-p(\alpha+1)^2(2\alpha-1)\end{aligned}$$

より，$\alpha=-1,\ \dfrac{1}{2}$

$\alpha=-1$ のとき

①より，$q=3p$

よって，$f(x)=px^3-3px+p=p(x^3-3x+1)$

したがって，$f'(x)=3p(x^2-1)=3p(x+1)(x-1)$

よって，$p>0$ とすれば，$f(x)$ の増減は次の表のようになり，

$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大値 q をもつ。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	極小	$\uparrow$

$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のとき

①より，$q=\dfrac{3}{4}p$

よって，$f(x)=px^3-\dfrac{3}{4}px+p=\dfrac{p}{4}(4x^3-3x+4)$

したがって，$f'(x)=\dfrac{p}{4}(12x^2-3)=\dfrac{3}{4}p(2x+1)(2x-1)$

よって，$p<0$ とすれば，$f(x)$ の増減は次の表のようになり，

$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大値 q をもつ。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	極小	$\uparrow$	極大	$\downarrow$

以上より，$p>0$ のとき：$\alpha=-1$，$q=3p$　$p<0$ のとき：$\alpha=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{3}{4}p$

286

(1)

$f'(x)=3x^2+6x+a$ より，$3x^2+6x+a=0$ が異なる 2 実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつとすると，$x<\alpha,\ \beta<x$ で $f'(x)>0$，$\alpha<x<\beta$ で $f'(x)<0$ となるから，それぞれの範囲で $f(x)$ は単調に増加，単調に減少し，$x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となる。

一方，$3x^2+6x+a=0$ が重解または虚数解をもつとき，$f'(x)\geq 0$ となり，$f(x)$ は，単調増加するため，極値をもたない。

よって，$f(x)$ が極大値と極小値をもつとき，$3x^2+6x+a=0$ は異なる 2 実数解をもつ。

このとき，$3x^2+6x+a=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ となる。

これと $\dfrac{D}{4}=9-3a$ より，$9-3a>0$

よって，求める a の値の範囲は $a<3$

(2)

(1)で $3x^2+6x+a=0$ の解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=\dfrac{a}{3}$

(3)

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)+f(\beta)&=\alpha^3+3\alpha^2+a\alpha+\beta^3+3\beta^2+a\beta\\
&=\alpha^3+\beta^3+3(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)\\
&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3(\alpha+\beta)^2-6\alpha\beta+a(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

これと(2)より，

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)+f(\beta)&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3(\alpha+\beta)^2-6\alpha\beta+a(\alpha+\beta)\\
&=(-2)^3-3\cdot\frac{a}{3}\cdot(-2)+3\cdot(-2)^2-6\cdot\frac{a}{3}+a\cdot(-2)\\
&=4-2a
\end{aligned}
$$

$f(\alpha)+f(\beta)=0$ より，$4-2a=0$ $\therefore a=2$

287

解法 1

接線 l の方程式を $y=px+q$ とすると，

接線 l と $y=f(x)$ の共有点の x 座標を求める方程式は $f(x)-(px+q)=0$

すなわち $x^4-ax^2+(b-p)x-q=0$ ・・・①

接線 l と $y=f(x)$ の接点は 2 つあるから，①は 2 つの重解をもち，これを t，u とすると，①の方程式は $(x-t)^2(x-u)^2=0$ と表せる。

すなわち $x^4-ax^2+(b-p)x-q=(x-t)^2(x-u)^2$ は恒等式である。

右辺を展開することにより，

$x^4-ax^2+(b-p)x-q=x^4-2(t+u)x^3+\{(t+u)^2+2tu\}x^2-2tu(t+u)x+t^2u^2$

両辺の各項の係数が等しいから，

$0=-2(t+u)$ ・・・②

$-a=(t+u)^2+2tu$ ・・・③

$b-p=-2tu(t+u)$ ・・・④

$-q=t^2u^2$ ・・・⑤

②より，$t+u=0$

これより，③と④は，それぞれ $tu=-\dfrac{a}{2}$ ・・・⑥　$p=b$ ・・・⑦

⑤と⑥より，$q=-\dfrac{a^2}{4}$ ・・・⑧

よって，接線 l の方程式 $y=px+q$ を a と b を用いて表した式は，⑦と⑧より，$y=bx-\dfrac{a^2}{4}$

解法 2

接線 l と $y=f(x)$ の 1 つの接点を $(t,\ f(t))$ とすると，接線 l の方程式は

$$
\begin{aligned}
y&=f'(t)(x-t)+f(t)\\
&=(4t^3-2at+b)(x-t)+t^4-at^2+bt\\
&=(4t^3-2at+b)x-3t^4+at^2
\end{aligned}
$$

$y=g(x)=(4t^3-2at+b)x-3t^4+at^2$ ・・・①　とおくと，

$f(x)-g(x)=0$ は $x=t$ と t でないもう 1 つの重解をもつ。

$f(x)-g(x)=x^4-ax^2-(4t^3-2atx)+3t^4-at^2=(x-t)^2(x^2+2tax-a+3t^2)$ より，

$(x-t)^2(x^2+2tx-a+3t^2)=0$ だから，t でない重解は $x^2+2tx-a+3t^2=0$ の解である。

この判別式を D とすると，重解をもつことから，$D=0$

これと $\dfrac{D}{4}=t^2+a-3t^2=a-2t^2$ より，$a-2t^2=0$　$\therefore t^2=\dfrac{a}{2}$ ・・・②

また，解が t でないことから，$t^2+2t^2-a+3t^2=6t^2-a\neq 0$ であるが，

これは $t^2=\dfrac{a}{2}$ より成り立つ。

よって，接線 l の方程式を a と b を用いて表した式は，①と②より，

$$
\begin{aligned}
y&=(4t^3-2at+b)x-3t^4+at^2\\
&=\left\{4t\left(t^2-\frac{a}{2}\right)+b\right\}x-3(t^2)^2+at^2\\
&=\left\{4t\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)+b\right\}x-3\left(\frac{a}{2}\right)^2+a\cdot\frac{a}{2}\\
&=bx-\frac{a^2}{4}
\end{aligned}
$$

(2)

$f(x)$ の導関数は $f'(x)=4x^3-2ax+b$ であり，これが $f'(x)=0$ すなわち $4x^3-2ax+b=0$ を満たす異なる 3 つの実数をもつことが $f(x)$ が極大値をもつための必要十分条件である。

また， $4x^3-2ax+b=0$ が異なる 3 つの実数解をもつための必要十分条件は，

$g(x)=4x^3-2ax+b$ とおくと，$g(x)$ が極大値と極小値をもちかつそれらの積が負となることである。

$g'(x)=12x^2-2a$ より， $g(x)$ が極大値と極小値をもつための必要十分条件は，

$12x^2-2a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつこと，すなわち $a>0$ を満たすことであり，

このとき， $12x^2-2a=2\left(x+\dfrac{\sqrt{6a}}{6}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{6a}}{6}\right)=0$ より，

$g(x)$ は $x=-\dfrac{\sqrt{6a}}{6}$ で極大値， $x=\dfrac{\sqrt{6a}}{6}$ で極小値をとる。

$g(x)$ の極大値と極小値の積が負だから，

$$g\left(-\frac{\sqrt{6a}}{6}\right)g\left(\frac{\sqrt{6a}}{6}\right)=\left(b+\frac{2a\sqrt{6a}}{9}\right)\left(b-\frac{2a\sqrt{6a}}{9}\right)$$
$$=b^2-\frac{8}{27}a^3$$

より， $b^2-\dfrac{8}{27}a^3<0$

これは $a\leq 0$ のとき成り立たないから， $b^2-\dfrac{8}{27}a^3<0$ には条件 $a>0$ が含まれる。

よって，求める必要十分条件は， $b^2-\dfrac{8}{27}a^3<0$

288

(1)

$g(x)=g(y)$ とすると， $g(x)-g(y)=0$

よって，

$$\begin{aligned}g(x)-g(y)&=4x^3-11x^2+6x-(4y^3-11y^2+6y)\\&=4(x-y)(x^2+xy+y^2)-11(x-y)(x+y)+6(x-y)\\&=(x-y)\{4(x^2+xy+y^2)-11(x+y)+6\}\\&=(x-y)f(x,\ y)\end{aligned}$$

より， $(x-y)f(x,\ y)=0$

これと， $x\neq y$ より， $f(x,\ y)=0$

逆に，$f(x,\ y)=0$ とすると，$(x-y)f(x,\ y)=g(x)-g(y)$ より，$g(x)-g(y)=0$ $\quad\therefore g(x)=g(y)$

ゆえに，題意が示された。

(2)

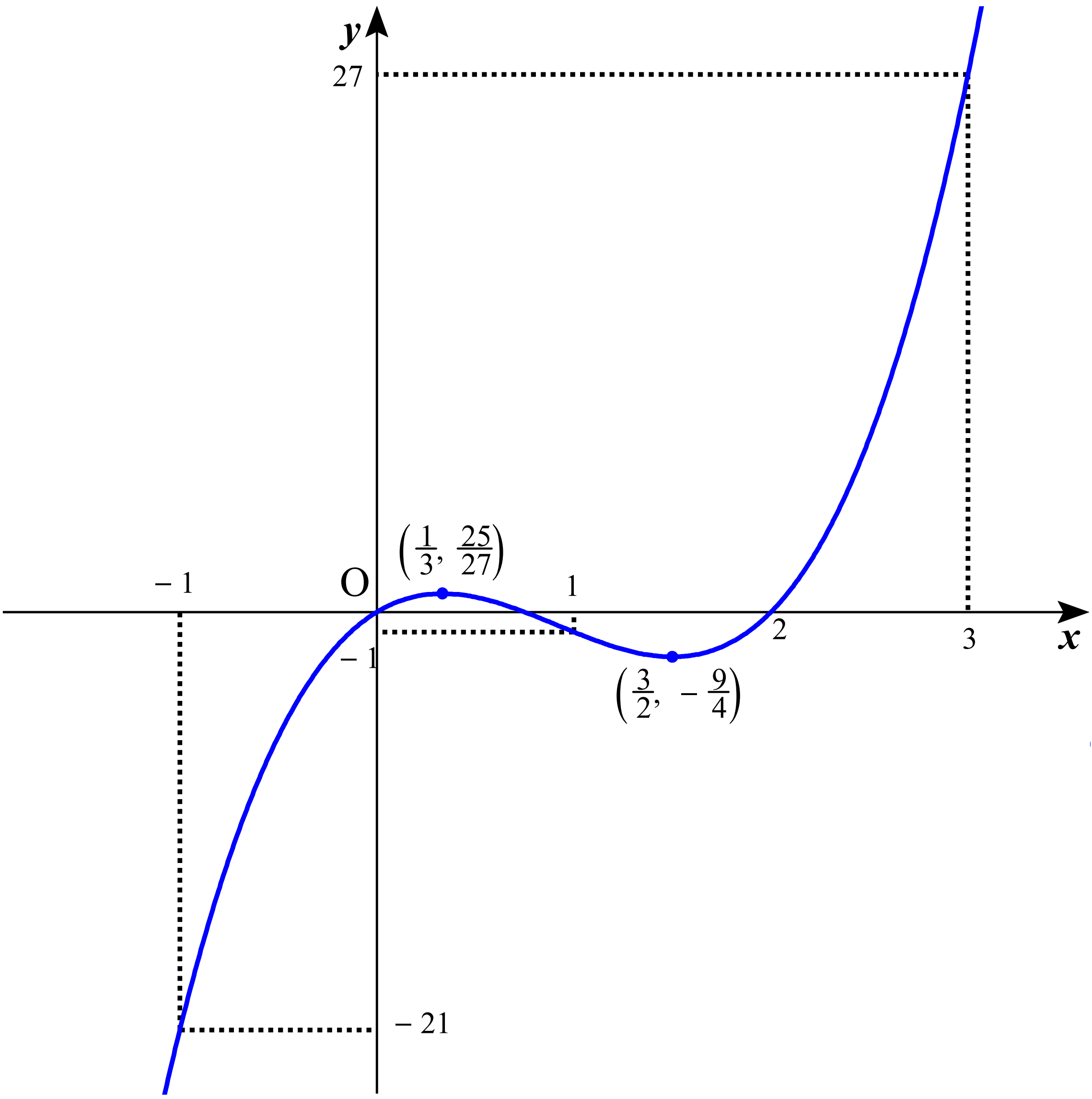
$g(-1)=-4-11-6=-21$， $g(0)=0$， $g(1)=4-11+6=-1$， $g(2)=32-44+12=0$，
$g(3)=108-99+18=27$

$g(x)=4x^3-11x^2+6x$ より， $g'(x)=12x^2-22x+6=2(6x^2-11x+3)=(2x-3)(3x-1)$
よって， $g(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↑	極大	↓	極小	↑

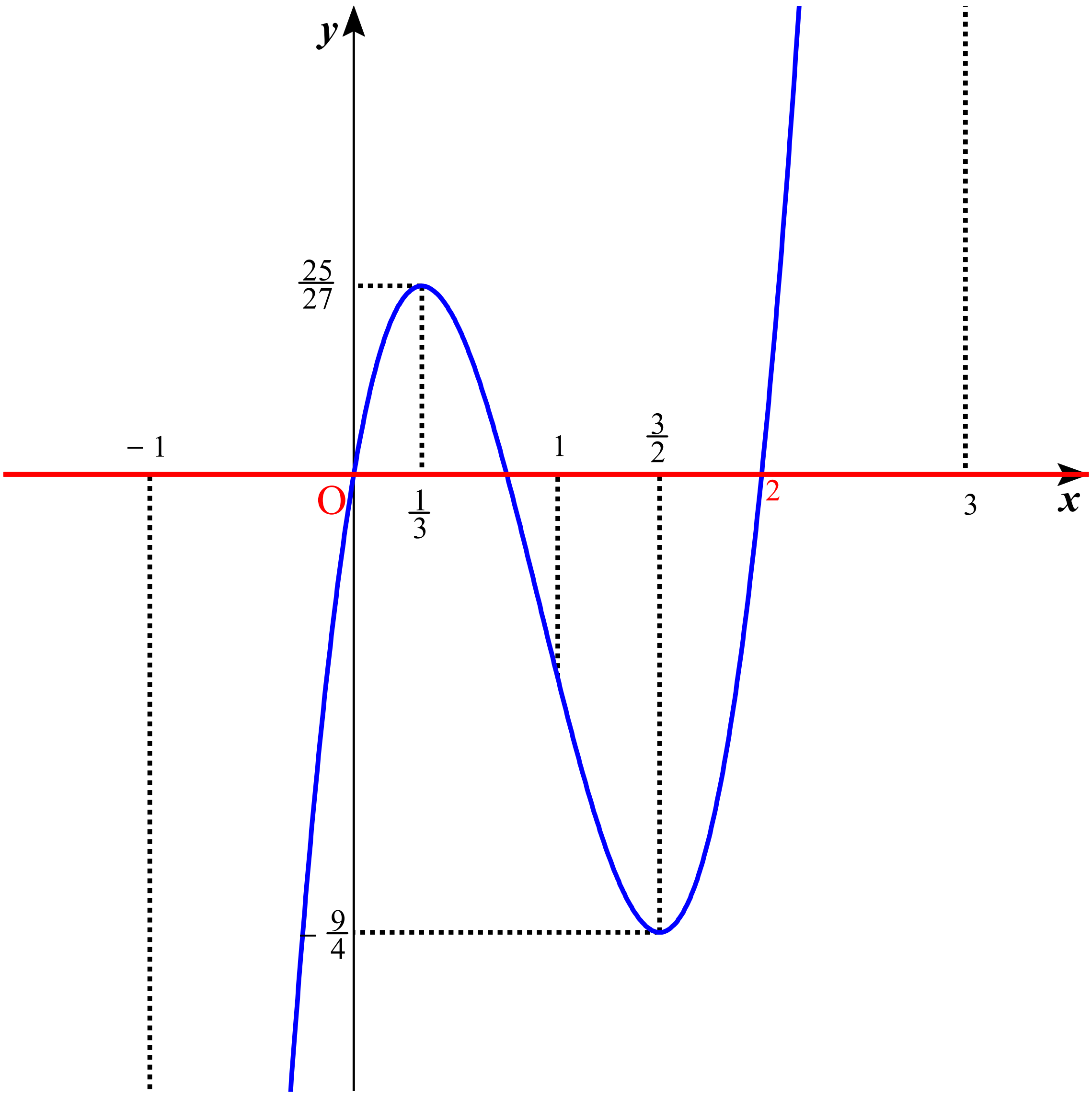
$g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}-\frac{11}{9}+2=\frac{25}{27}$， $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{2}-\frac{99}{4}+9=-\frac{9}{4}$

以上より，グラフの概形は次図のようになる。



(3)

(1)より， $g(x)=g(y)$ かつ $x<y$ を満たす整数 $x,\ y$ の組をすべて求めればよい。
ここで，混乱を避ける目的で， x と y をそれぞれ α と β に置き換えることにより，
$g(\alpha)=g(\beta)$ かつ $\alpha<\beta$ を満たす整数 $\alpha,\ \beta$ の組を求めると，このような $\alpha,\ \beta$ が存在するのは，
(2)のグラフにおいて，1 つの y の値に対して 2 つ以上の x の値が対応するような範囲であり，
それを y の値の範囲で表すと， $-\dfrac{9}{4}\leq y\leq\dfrac{25}{27}$ である。そこで，この範囲において 1 つの y の値と対応する x の値が整数となる組 $(\alpha,\ \beta)$ をさがすと， $(\alpha,\ \beta)=(0,\ 2)$ が見つかる。
ゆえに，求める整数 $x,\ y$ の組は $(x,\ y)=(0,\ 2)$



289

与式を t について整理し，t の 1 次方程式にすると，$\left(x^3-ax\right)t-y+1=0$

よって，この方程式が $0\leq t\leq 1$ において解をもつように $x,\ y$ の条件を求め図示すればよい。

(i) $x^3-ax=0$ のとき　すなわち $x\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right)=0$ より，$x=0,\ \pm\sqrt{a}$ のとき

$0\cdot t-y+1=0$ より，$y=1$ とすれば任意の実数 t に対し成り立つ。

よって，$0\leq t\leq 1$ の範囲において解をもつ。

(ii) $x^3-ax\neq 0$ すなわち $x\neq 0,\ \pm\sqrt{a}$ のとき

解法 1

$t=\dfrac{y-1}{x^3-ax}$ より，$0\leq\dfrac{y-1}{x^3-ax}\leq 1$

よって，$x^3-ax\neq 0$ の条件の元，

$0\leq y-1\leq x^3-ax$　または　$x^3-ax\leq y-1\leq 0$

すなわち，$1\leq y\leq x^3-ax+1$　または　$x^3-ax+1\leq y\leq 1$

ここで，$y=x^3-ax+1$ の増減を調べると，

$y'=3x^2-a=3\left(x+\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)$ より，増減は次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	$\dfrac{2a\sqrt{3a}}{9}+1$	$\downarrow$	$-\dfrac{2a\sqrt{3a}}{9}+1$	$\uparrow$

また，$y=x^3-ax+1$ に $x=0,\ \pm\sqrt{a}$ を代入すると，いずれも $y=1$ となる。

補足

$$0\leq\frac{y-1}{x^3-ax}\leq 1\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x^3-ax\right|\geq\left|y-1\right|\\ y-1\geq 0\\ x^3-ax>0\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}\left|x^3-ax\right|\geq\left|y-1\right|\\ y-1\leq 0\\ x^3-ax<0\end{cases}$$

解法 2

$f(t)=\left(x^3-ax\right)t-y+1$ とおくと，$\left(x^3-ax\right)t-y+1=0$ の解が $0\leq t\leq 1$ を満たすことと直線 $f(t)$ が $0\leq t\leq 1$ において t 軸と共有点をもつことは同値である。

したがって，$f(0)f(1)\leq 0$ すなわち $(-y+1)\left(x^3-ax-y+1\right)\leq 0$ が成り立てばよい。

よって，$\begin{cases}-y+1\leq 0\\ x^3-ax-y+1\geq 0\end{cases}$　または　$\begin{cases}-y+1\geq 0\\ x^3-ax-y+1\leq 0\end{cases}$

すなわち，$1\leq y\leq x^3-ax+1$　または　$x^3-ax+1\leq y\leq 1$

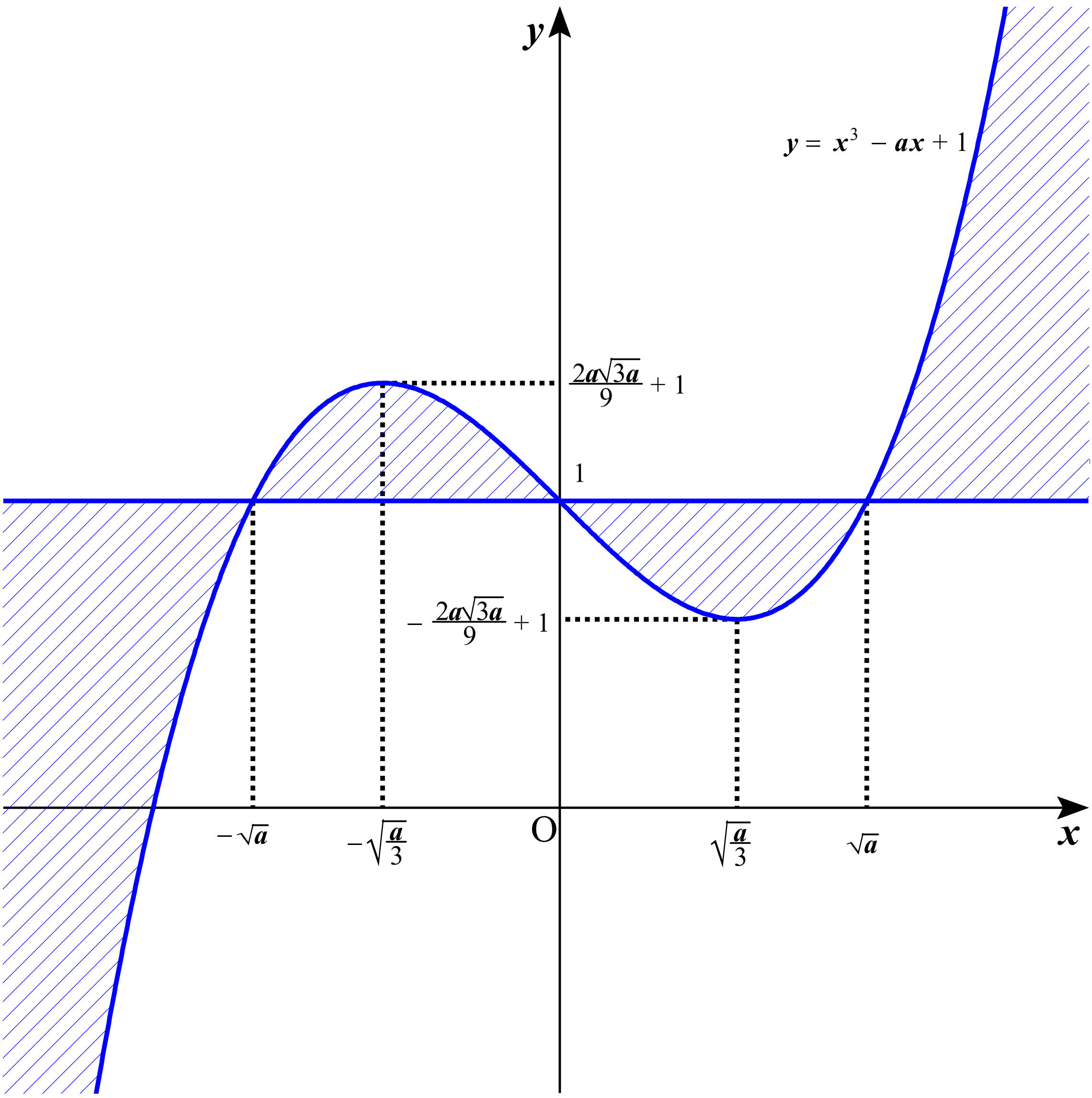
以下同じ

以上より，(i)と(ii)を合わせると，

$1 \leq y \leq x^3 - ax + 1$　または　$x^3 - ax + 1 \leq y \leq 1$

よって，領域 D は次図のようになる。

ただし，境界線を含む



290

(1)

(i) $f(x)$が 1 次関数のとき，すなわち$a=b=0$のとき

$f(x)=x$ より，$f(x)$は常に増加する。

(ii) $f(x)$が 2 次関数のとき，すなわち$a=0,\ b\neq 0$のとき

2 次関数は極値をもつから，「$f(x)$は常に増加する」は成り立たない。

(iii) $f(x)$が 3 次関数のとき，すなわち$a\neq 0$のとき

$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$

$f(x)$は常に増加するのは$f'(x)\geq 0$が成り立つときだから，

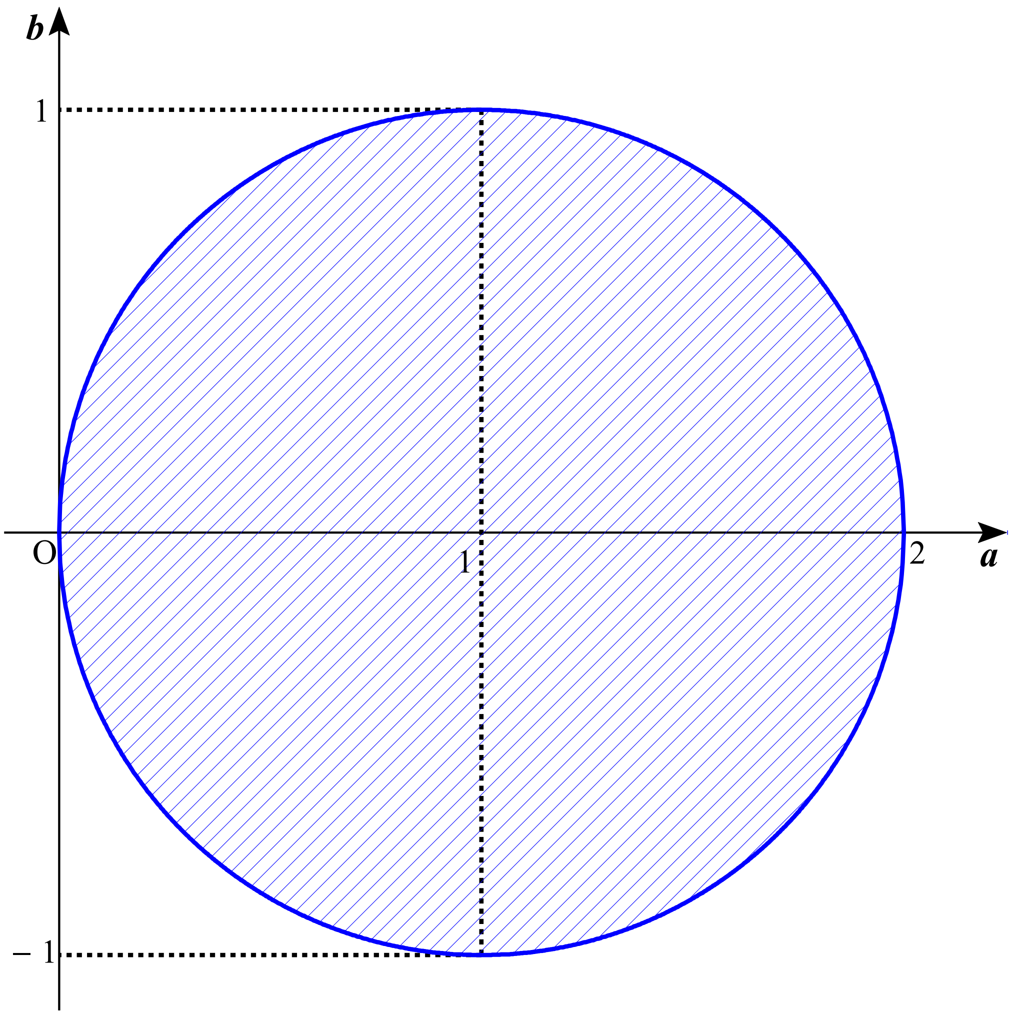
$a>0$かつ，$f'(x)$の判別式をDとすると，$D\leq 0$

これと，$\dfrac{D}{4}=(a+b)^2-2a(b+1)=(a-1)^2+b^2-1$より，$(a-1)^2+b^2-1\leq 0$

よって，$(a-1)^2+b^2\leq 1\ (a>0)$

(i)～(iii)より，$(a-1)^2+b^2\leq 1$

よって，下図のようになる。ただし，境界線を含む。



(2)

(i) $f(x)$ が 1 次関数のとき，すなわち $b=0$ のとき

(1)より，$f(x)$ は $x>-1$ において常に増加する。

(ii) $f(x)$ が 2 次関数のとき，すなわち $b\neq 0$ のとき

$f(x)=bx^2+(b+1)x$ より，$f'(x)=2bx+b+1=2b\left(x+\dfrac{b+1}{2b}\right)$

よって，$f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するのは，

$f(x)$ が $x=-\dfrac{b+1}{2b}$ で極小かつ $-\dfrac{b+1}{2b}\leq -1$ のときである。

$f(x)$ が $x=-\dfrac{b+1}{2b}$ で極小となるのは $b>0$ のときだから，

$b>0$ かつ $-\dfrac{b+1}{2b}\leq -1$ より，$0<b\leq 1$

よって，(i)または(ii)より，$0\leq b\leq 1$ のとき $f(x)$ は $x>-1$ において常に増加する。

(3)

(i) $a=0$ のとき

(2)より，$f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するのは，$0\leq b\leq 1$ のとき。

(ii) $a\neq 0$ のとき

$(a-1)^2+b^2\leq 1\ (a>0)$ のとき

(1)より，$f(x)$ は常に増加する。

$(a-1)^2+b^2>1$　すなわち　$a^2-2a+b^2>0$ のとき

2 次方程式として処理すると，

$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$ において，

$2ax^2+2(a+b)x+b+1=0$ は異なる 2 実数解をもつので，

大きい方の解を α とすると，

$\alpha\leq -1$ かつ $x>\alpha$ において $f'(x)>0$ すなわち $a>0$ ならば

$f(x)$ は $x>-1$ において常に増加する。

よって，$\alpha=\dfrac{-(a+b)+\sqrt{a^2-2a+b^2}}{2a}$ より，

$a>0$　・・・①　かつ　$\dfrac{-(a+b)+\sqrt{a^2-2a+b^2}}{2a}\leq -1$　・・・②　を満たせばよい。

①より，②の両辺に $2a$ を掛けて整理すると，$\sqrt{a^2-2a+b^2}\leq -a+b$

すなわち，$a^2-2a+b^2\leq(-a+b)^2$ かつ $-a+b\geq 0$

よって，これと①より，$0<a\leq b\leq 1$

2 次関数として処理すると，

$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1=2a\left(x+\dfrac{a+b}{2a}\right)^2-\dfrac{a^2-2a+b^2}{2a}$ より，

$x>-1$ で $f'(x)\geq 0$ となるとき，

$a>0$ かつ $-\dfrac{a+b}{2a}\leq -1$ かつ $f'(-1)=-b+1\geq 0$ より， $0<a\leq b\leq 1$

よって， $\begin{cases} a>0 \\ (a-1)^2+b^2\leq 1 \end{cases}$ 　または　 $\begin{cases} 0<a\leq b\leq 1 \\ (a-1)^2+b^2>1 \end{cases}$

(i)または(ii)より，

$\begin{cases} a=0 \\ 0\leq b\leq 1 \end{cases}$ 　または　 $\begin{cases} a>0 \\ (a-1)^2+b^2\leq 1 \end{cases}$ 　または　 $\begin{cases} 0<a\leq b\leq 1 \\ (a-1)^2+b^2>1 \end{cases}$

これを図示すると下図のようになる。ただし，境界線を含む。